Inf Gen II

INFORMATICA GENERALE II

Ingegneria delle Telecomunicazioni
Università di Trento

Marco Roveri

roveri@irst.itc.it

Analisi algoritmi

AA 2006/2007

MR

Inf Gen II

Analisi Algoritmi

- Si progetti un programma che verifica se un numero v occorre all'interno di un insieme di numeri memorizzati in un array A.
  - Se troviamo l'occorrenza ritorniamo l'indice dove occorre, altrimenti ritorniamo -1.
- Esempio: v=4
  - A[4] = {1, 2, 5, 4};
    - Output: 3
  - A[4] = {1, 3, 6, 2};
    - Output: -1

AA 2006/2007

MR

Inf Gen II

Analisi Algoritmi

- Una prima soluzione è:

```
int search(int A[], int v, int N) {
    for(int i = 0; i < N; i++)
        if ( v == A[i] ) return i;
    return -1;
}
```

- Quale è la bontà di questa soluzione?

Inf Gen II

Come analizzare la bontà di un algortimo

- Correttezza
  - Dimostrazione formale (matematica).
  - Ispezione informale.
- Utilizzo delle risorse
  - *Tempo di esecuzione*.
  - *Utilizzo della memoria*.
- Semplicità
  - Facile da capire e mantenere.

Inf Gen II

Tempo di esecuzione

- Tempo necessario al programma per terminare.
- Dipende da molteplici fattori:
  - Hardware (velocità del processore, bus, disco..)
  - Compilatore (ottimizzazioni che il compilatore può effettuare, utilizzo di istruzioni speciali, …)
  - Dimensione del problema di input (nel caso precedente N).

AA 2006/2007

MR

5

Inf Gen II

Analisi Algoritmo search

- La ricerca sequenziale esamina
  - N numeri per ricerca con esito negativo,
  - e mediamente N/2 numeri per ricerca con esito positivo.
- Se tutti i numeri hanno uguale probabilità di essere quello cercato, e assumendo che il costo medio del confronto tra due numeri sia costante, allora:

$$(1+2 + \ldots + N) / N = (N + 1)/2$$

è il costo medio dell'algoritmo.

AA 2006/2007

MR

6

Inf Gen II

Analisi Algoritmo search

- Il costo dell'algoritmo di ricerca sequenziale è proporzionale a N, dimensione del problema.
  - Raddoppiando N mi aspetto un raddoppio del tempo di calcolo.
- Se dobbiamo effettuare M ricerche, il costo di tali ricerche sarà proporzionale a MN.
  - Se per confrontare due numeri occorrono c microsecondi, $N = 10^6$ e $M = 10^9$:
    - il tempo medio richiesto sarà $(c/2)10^9$ secondi
    - ovvero circa 16c anni ☹
- Chiaro che questo algoritmo per questi possibili valori è inutilizzabile!!!

AA 2006/2007

MR

Inf Gen II

Algoritmo di ricerca binaria

- Assunzione: array A ordinato, ovvero per ogni $1 \leq i \leq N - 1$, $A[i - 1] \leq A[i]$
- Sotto questa ipotesi possiamo eliminare metà array, confrontando il numero da cercare con l'elemento al centro dell'array:
  - Se questi numeri sono uguali abbiamo finito.
  - Se il valore dell'elemento centrale è minore del valore cercato, applichiamo stesso metodo alla metà di sinistra.
  - Altrimenti applichiamo stesso metodo alla metà di destra.

2	4	5	8	11	20	25	30	32

AA 2006/2007

MR

Inf Gen II

Algoritmo di ricerca binaria

```
int binsearch(int A[], int N, int v) {
  return binsearch_recur(A, 0, N-1, v);
}

int binsearch_recur(int A[], int l, int r, int v) {
  int m = (l + r) / 2;

  if (v == A[m]) return m;
  if (v < A[m]) return binsearch_recur(A, l, m-1, v);
  if (v > A[m]) return binsearch_recur(A, m+1, r, v);
  return -1;
}
```

Versione ricorsiva

Inf Gen II

Algoritmo di ricerca binaria

```
int binsearch( int A[], int N, int v) {
 int l = 0, r = N-1;
 while (r ≥ l) {
   int m = (r + l) / 2;

   if (v == A[m]) return m;
   if (v < A[m])
       r = m - 1;
   else
       l = m + 1;
  }
  return -1;
}
```

Versione iterativa

Inf Gen II

Analisi algoritmo ricerca binaria

- Se T_N è il numero di confronti richiesti nel caso peggiore da una ricerca binaria, il modo di ridurre un problema di dimensione N ad uno di dimensione N/2 ci porta a:

$$T_N \leq T_{N/2} + 1 \quad \text{per } N \geq 2,\ T_1 = 1$$

Assumendo $N = 2^n$ è facile mostrare che

$$T_N \leq n + 1 = \lg N + 1$$

AA 2006/2007

MR

11

Inf Gen II

Analisi algoritmo di ricerca binaria

- Se dobbiamo effettuare M ricerche, il costo di tali ricerche sarà proporzionale a M lg N.
- Se per confrontare due numeri occorrono c microsecondi:
  - $N = 10^6$ e $M = 10^9$ il tempo medio richiesto sarà circa $2c10^4$ secondi, ovvero circa 5.5c ore.
    - 5.5c ore << 16c anni ☺

AA 2006/2007

MR

12

Inf Gen II

Notazione O

- Una indicazione del tempo medio di esecuzione di un algoritmo la si fornisce con la cosiddetta *notazione O*, o *limite superiore asintotico*.
  - Se $f(n) \leq c\, g(n)$ per tutti gli $n \geq n_0$
  - $g(n)$ è detto un limite superiore asintotico di $f(n)$.
  - Scriviamo $f(n) = O(g(n))$
  - Leggiamo $f(n)$ è O-grande di $g(n)$.

AA 2006/2007

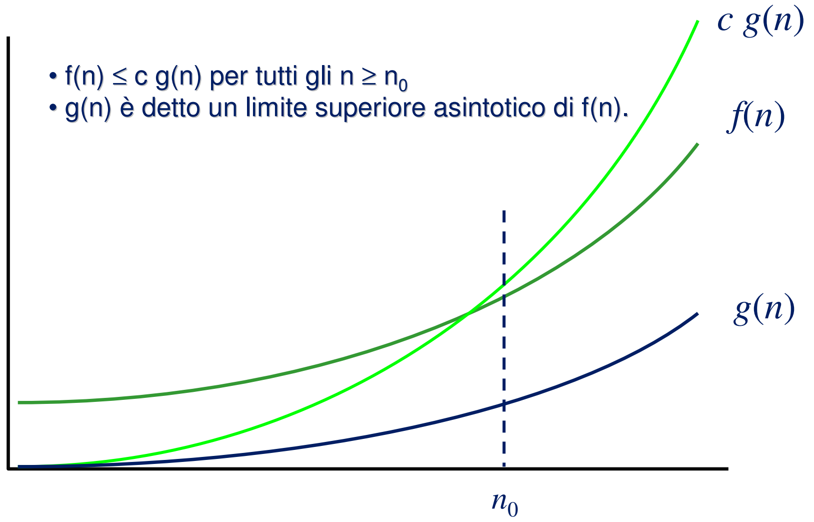
MR

13

Inf Gen II

Notazione O

- $f(n) \leq c\, g(n)$ per tutti gli $n \geq n_0$
- $g(n)$ è detto un limite superiore asintotico di $f(n)$.



AA 2006/2007

MR

14

Inf Gen II

Notazione O

- In genere quando impieghiamo la notazione O, utilizziamo la formula più "semplice".
- La notazione O() fornisce un limite superiore.
  - Non rappresenta la funzione precisa del tempo di esecuzione.
- Esempio

$$3n^2+2n+5 = O(n^2)$$

- Funzioni classiche in ordine di grandezza crescente:
  - O(1) costante
  - O(lg N) logaritmico
  - O(N) lineare
  - O(N lg N) pseudolineare
  - $O(N^2)$ quadratico
  - $O(N^3)$ cubico
  - $O(2^N)$ esponenziale
  - O(N!) fattoriale
  - $O(N^N)$

AA 2006/2007

MR

15

Inf Gen II

Stima del tempo di esecuzione

- Nel seguito descriveremo un modo semplice per *stimare* il limite asintotico superiore O() del tempo di esecuzione per diversi tipi di algoritmi:
  - *iterativi*
  - *ricorsivi*

AA 2006/2007

MR

16

Inf Gen II

Tempo di esecuzione: *operazioni semplici*

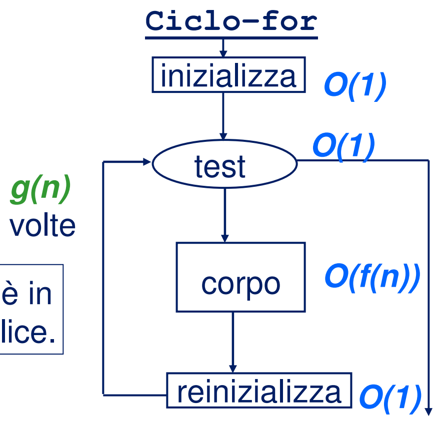
- operazioni aritmetiche (+,*,…)
- operazioni logiche(&&, ||,….)
- confronti (≤, ≥, = ,…)
- assegnamenti (a = b) senza chiamate di funzione.
- operazioni di lettura (cin)
- operazioni di controllo (break, continue, return)

$$T(n) = O(1)$$

AA 2006/2007 MR 17

Inf Gen II

Tempo di esecuzione: ciclo “for”

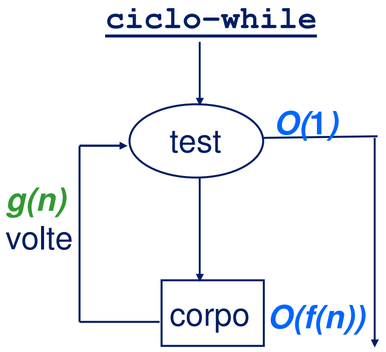


stabilire *g(n)* è in genere semplice.

$$T(n) = O(g(n) \times f(n))$$

AA 2006/2007 MR 18

Tempo di esecuzione: ciclo “while”

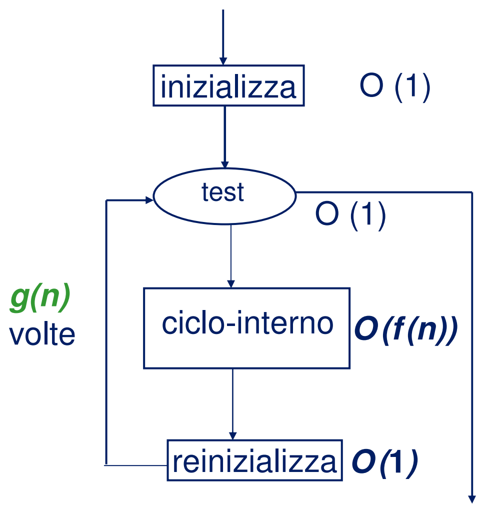


Bisogna stabilire un limite per il numero di iterazioni del ciclo: *g(n)*.

Può essere necessaria una prova induttiva per determinare *g(n)*.

$$T(n) = O(g(n) \times f(n))$$

Tempo di esecuzione: cicli innestati



$$T(n) = O(g(n) \times f(n))$$

Inf Gen II

Esempio

```
for(int i = 1; i <= n; i++)
    for(int j = 1; j <= n; j++)
        k = i + j;
```

$$\left.\left.\begin{array}{l}\text{for(int j = 1; j <= n; j++)}\\ \quad \text{k = i + j;}\end{array}\right\} = O(n)\right\} = O(n^2)$$

```
for(int i = 1; i <= n; i++)
    for(int j = i; j <= n; j++)
        k = i + j;
```

$$\left.\left.\begin{array}{l}\text{for(int j = i; j <= n; j++)}\\ \quad \text{k = i + j;}\end{array}\right\} = O(n - i)\right\} = O(n^2)$$

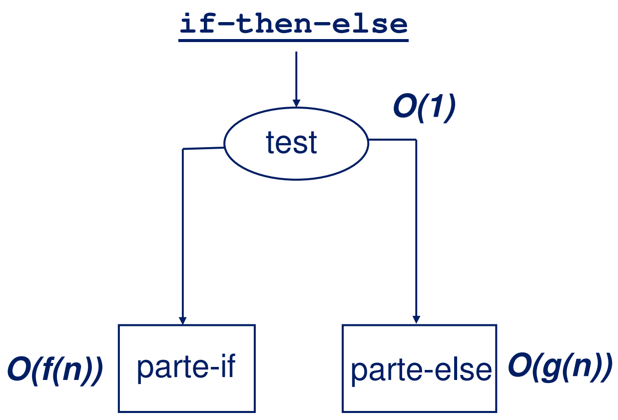
$$T(n) = O(n \times n) = O(n^2)$$

AA 2006/2007

MR

Inf Gen II

Tempo di esecuzione: “if-then-else”



$$O(\max(f(n), g(n)))$$

AA 2006/2007

MR

Inf Gen II

Esempio

```
if  (A[i][j] == 0)
  for(int i = 1; i <= n; i++)
    for(int j = i; j <= n; j++)
        A[i][j] = 0;
else
  for(int i = 1; i <= n; i++)
     A[i][0] = 1;
```

$$\left.\begin{array}{l}\text{for(int i = 1; i <= n; i++)}\\ \quad \left.\begin{array}{l}\text{for(int j = i; j <= n; j++)}\\ \quad\text{A[i][j] = 0;}\end{array}\right\} = O(n-i)\end{array}\right\} = O(n^2)$$

$$\left.\begin{array}{l}\text{for(int i = 1; i <= n; i++)}\\ \quad\text{A[i][0] = 1;}\end{array}\right\} = O(n)$$

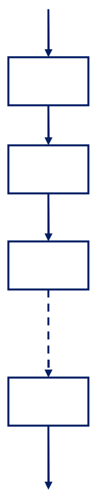
$$\boxed{T(n) = max\ (O(n^2), O(n)) = O\ (n^2)}$$

AA 2006/2007

MR

Inf Gen II

Tempo di esecuzione: blocchi sequenziali



$O(f_1(n))$

$O(f_2(n))$

$O(f_3(n))$

$O(f_m(n))$

$$O(f_1(n) + f_2(n) + \ldots + f_m(n))$$

$$\downarrow$$

$$\boxed{O(max(f_i(n)),\quad i = 1, \ldots., m}$$

AA 2006/2007

MR

Tempo di esecuzione: algoritmi ricorsivi

- Il tempo di esecuzione è espresso mediante una *equazione di ricorrenza*.
  - Esempio:

$$\text{Binsearch} \; : T(n) = \begin{cases} O(1) & \text{se } n = 1 \\ T(n/2) + O(1) & se\ n > 1 \end{cases}$$

- Sono necessarie tecniche specifiche per risolvere le equazioni di ricorrenza.

Soluzione di equazioni di ricorrenza

- Esistono molti metodi per risolvere le equazioni di ricorrenza:
  - Metodo iterativo
    - Si itera la regola induttiva di *T(n)* in termini di *n* e del caso base.
    - Si richiede poi di solito la manipolazione delle somme:

$$\sum_1^n i = n(n+1)/2$$

  - Il metodo di sostituzione (non lo vedremo)
    - Si ipotizza una possibile soluzione.
    - Si sostituisce l'ipotetica soluzione nei casi base e induttivo.
    - Si dimostra la correttezza della ipotesi tramite induzione matematica.

Metodo iterativo

$$T(n) = T(n/2) + c =$$
$$= T(n/4) + c + c =$$
$$= T(n/8) + c + c + c$$

- Alla i-esima iterazione abbiamo:

$$T(n) = T(n/2^i) + ic$$

- L'iterazione raggiunge 1 quando:

$n = 2^i$, ovvero quando $i = \log(n)$, quindi

$$T(n) = c + \log(n)c$$

- E quindi possiamo dire che $T(n) = O(\log(n))$